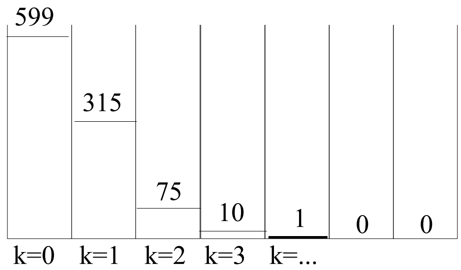
M031208L.sw5 2.LNW- 13.1 – Stochastik-LK – 08.12.2003. Name:



1) *Durch ein schräg gestelltes Galtonbrett mit n-Stufen fallen eine Vielzahl von Kugeln.*
Nach Abschluss des Versuchs werden die Füllhöhen ***h*** *(in mm) in den einzelnen Auffangbehältern* ***k*** *gemessen.*
Leider wurde vergessen, die Anzahl n der Nagelreihen oder die Gesamtzahl der Auffangbehälter zu zählen !

a) Bestimme aus der gemessenen Binomialverteilung für k den Erwartungswert μ=E(X) und dessen Varianz V(X).
b) Berechne jetzt die Anzahl n der Stufen und die Wahrscheinlichkeit p für eine Ablenkung der Kugel am Nagel nach rechts (von vorne gesehen). Beachte, dass die Füllhöhen nur ein ungefähres Maß für die Wahrscheinlichkeiten P(X=k) liefern.
c) Ein Galtonbrett mit 50 Stufen wird so aufgestellt, dass Kugeln im Mittel im Auffangbehälter k=20 landen sollten. Wie viel Prozent aller Kugeln landen dann wirklich in diesem Behälter?
d) Wie viel Prozent der Kugeln sammeln sich dabei in den Behältern von k=15 bis k=25 an ?

2) *Ein Großhändler beliefert Supermärkte mit Kokosnüssen. Normalerweise sind davon 10% innen schon ranzig und damit ungenießbar. Dies wird von den Märkten akzeptiert - Kunden bekommen dann vom Markt kostenlosen Ersatz (Wenn sie ihren Kaufbeleg aufgehoben haben und sich trauen zu reklamieren).*
Bei der neuen Ernte (oder waren es vielleicht Nüsse vom letzten Jahr?) häufen sich in einigen Supermärkten die Reklamationen. 40% aller Nüsse in diesen Märkten sind schlecht. Die Marktleiter der Ladenkette werden angewiesen, durch eine Stichprobe bei 10 Nüssen festzustellen, ob auch sie von der schlechten Ware betroffen sind.
Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit:
a) 10% der Nüsse im Markt sind schlecht. In der Stichprobe werden aber genau 3 schlechte Nüsse gefunden.
b) 40% der Nüsse im Markt sind schlecht. In der Stichprobe werden aber weniger als 3 (also 0,1 oder 2) schlechte Nüsse gefunden.
c) 10% der Nüsse im Markt sind schlecht. In der Stichprobe werden aber mehr als 2 schlechte Nüsse gefunden.
Die Zentrale der Ladenkette fordert alle Marktleiter zum Zurückweisen der Sendung auf, wenn mehr als 3 schlechte Nüsse unter den 10 Nüssen der Stichprobe waren.
d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden dabei Lagerbestände zurückgeschickt, die nur 10% schlechte Nüsse aufweisen ?
e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden dabei Lagerbestände NICHT zurückgeschickt, die wirklich 40% schlechte Nüsse aufweisen ?

3) *In einer Bevölkerung leidet jede Person mit der Wahrscheinlichkeit p = 2% an einer bestimmten Krankheit. Der Erreger kann im Blut durch ein aufwändiges Testverfahren festgestellt werden, auch dann noch, wenn dieses Blut vielfach „verdünnt" wird.*
Bei einer Reihenuntersuchung von 10 000 Personen entschließt man sich zu folgendem Verfahren:
Die Blutproben von jeweils 10 Personen werden vermischt und diese Mischung in einem Test auf den Erreger hin untersucht. Bei negativem Testausgang kann man annehmen, dass keine der 10 Personen erkrankt ist. Ist das Ergebnis jedoch positiv, so wird anschließend das Blut jeder der 10 Personen noch einmal einzeln untersucht.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, in dem Blutgemisch der 10 Personen den Erreger zu finden?
b) Wie viele Gruppen müssen mindestens untersucht werden, damit mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein positives Testergebnis anfällt?
c) Wie viele Tests werden insgesamt bei der Untersuchung der 10 000 Personen erforderlich werden ?
d) Wäre eine andere Gruppengröße sinnvoller? (Es ist nicht nach der optimalen Gruppengröße gefragt !)
Ein neu entwickelter Schnelltest ist so billig, dass ***jede*** *Person einzeln untersucht werden kann. Bei einer erkrankten Person zeigt dieser Test in 95% aller Fälle durch eine positive Reaktion die Erkrankung richtig an. In 1% aller Fälle wird aber auch bei nicht erkrankten Personen ein positives Testergebnis angezeigt.*
e) Das Testergebnis einer Person ist positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie erkrankt ist ?
f) Das Testergebnis einer Person ist negativ. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie wirklich nicht erkrankt ist ?

4) *Ein Multiple-Choice-Test enthält 20 Fragen. Zu jeder Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens 11 Fragen richtig beantwortet werden.*
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht man den Test, wenn man alle Fragen durch zufälliges Ankreuzen beantwortet?
b) Wie viele richtige Antworten muss man verlangen, damit mit purem Raten in weniger als 1% der Fälle die Prüfung bestanden wird?
Die 20 Fragen werden aus einem Pool von 40 möglichen Fragen zufällig ausgewählt. Ein Student kennt von 30 Fragen die richtige Antwort, bei 10 Fragen hat er sich eine falsche Antwortmöglichkeit eingeprägt.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 15 Fragen richtig beantworten kann?

==

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{i=m} x_i \cdot P(X = x_i) \quad \text{bei Bionomialverteilung:} \quad \mu = \sum_{k=0}^{k=n} k \cdot P(X=k) = n \cdot p$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{i=m} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) \quad \text{bei Bionomialverteilung:} \quad V(X) = \sum_{k=0}^{k=n} (k-\mu)^2 \cdot P(X=k) = n \cdot p \cdot q$$