Dreieichschule - Gymnasium Langen
Abiturprüfung 2004 - Mathematik Leistungskurs
Vorschlag A

Aufgabe 1
Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = e^{-kx}\cdot\cos(kx)$ mit dem Parameter $k>0$

a) Bilden Sie allgemein die beiden ersten Ableitungen.
b) Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen von $f_k(x)$, $f_k'(x)$ und $f_k''(x)$
c) Welchen Punkt haben alle Funktionsgraphen von $f_k(x)$ (unabhängig von k) gemeinsam?
d) Führen Sie für den Fall $k = \pi/2$ im Intervall $[-1 \le x \le 3]$ eine Kurvendiskussion durch.
e) Berechnen Sie für den speziellen Fall von 1d) die Steigung des Graphen an der Stelle $x= -1$.
Bestimmen Sie nun 3 weitere, sinnvoll gewählte Punkte und zeichnen Sie den Funktionsgraphen unter Verwendung aller bestimmten Eigenschaften. (Eine Einheit = 5 cm!)
f) Bestimmen Sie durch zweifache, partielle Integration den Wert des Integrals $\int_0^b e^{-kx}\cos(kx)\,dx$
und bilden Sie den Grenzwert des Integralwertes für $b\to\infty$

Aufgabe 2
Gegeben ist die Matrix $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a) Bilden Sie allgemein die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$. Unter welchen Umständen ist dies nicht möglich?
b) Lösen Sie für den speziellen Fall $\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ das Gleichungssystem $\mathbf{M}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}$
c) Fassen Sie die beiden Gleichungen des Gleichungssystems von 2b) als Geradendarstellungen in der x-y-Ebene auf. Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich beide Geraden schneiden.
d) Für bestimmte Vektoren $\vec{v}$ ergibt sich für das $\mathbf{M}\cdot\vec{v}$ Produkt : $\mathbf{M}\cdot\vec{v} = k\cdot\vec{v}$ mit $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $\vec{v}\neq\vec{0}$
Ermitteln Sie die bei der Matrix **M** möglichen Werte von k und geben sie jeweils einen zugehörigen Vektor $\vec{v}$ an, für den die Gleichung $\mathbf{M}\cdot\vec{v} = k\cdot\vec{v}$ erfüllt ist.
e) Die unter c) beschriebenen 2 Geraden sind die Schnittgeraden von zwei Ebenen E_1 und E_2 mit der x-y- Koordinatenebene. Beide Ebenen haben einen gemeinsamen Punkt (0 ; 0 ; h) auf der z-Achse. Wählen Sie h so, dass sich die beiden Ebenen rechtwinklig schneiden.

Aufgabe 3
Ein Test zum Vordiplom an der Uni enthält eine Frage mit vier plausibel wirkenden Antwortmöglichkeiten.
Nur eine Antwort ist jedoch richtig. BesucherInnen der Vorlesung finden (nach Meinung der Professorin) die richtige Antwort mit Sicherheit heraus, alle anderen können nur zufällig eine Möglichkeit ankreuzen.

a) Von 320 StudentInnen kreuzen 224 die richtige Antwortmöglichkeit an.
Wie viele StudentInnen schwänzten (nach Meinung der Professorin) die Vorlesung ?
b) Ein Lernpsychologe überzeugt die Professorin, dass auch BesucherInnen *ihrer* Vorlesung zum Teil auf „RATEN“ angewiesen sind.
Er rechnet damit, dass 20% der VorlesungsbesucherInnen die richtige Antwort wieder vergessen haben.
Ermitteln Sie unter dieser Bedingung den Anteil der VorlesungsbesucherInnen an den Prüflingen.
c) Gehen Sie nun davon aus, dass 75% aller Prüflinge die Vorlesung besuchten, 20% davon aber vergesslich sind.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine StudentIn aus der Gruppe derjenigen die die Frage richtig beantworteten, die Vorlesung schwänzte ?
d) Wie hoch müsste die Anzahl n der Antwortmöglichkeiten mindestens sein, damit bei 25% SchwänzerInnen der Anteil der VorlesungsschwänzerInnen an den richtig Antwortenden unter 5% sinkt ?
e) Bei einer weiteren Frage mit 4 Antwortmöglichkeiten haben **alle 320** Prüflinge nur **geraten** .
Wie Wahrscheinlich ist es, dass dann die Anzahl richtiger Antworten ab 71 bis 90 liegt ?
(Benutzen Sie die Tabelle zur Normalverteilung.)

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Tabelle zur Normalverteilung, Taschenrechner.

Dreieichschule - Gymnasium Langen
Abiturprüfung 2004 - Mathematik Leistungskurs
Vorschlag B

Aufgabe 1
Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = \ln(x) \cdot [\ln(x) + k]$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^+$
a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von $f_k(x)$.
b) Untersuchen Sie die Funktionen auf Schnittpunkte mit der x-Achse und bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte in Abhängigkeit von k. Zeigen Sie, dass es sich bei den Extrempunkten immer um absolute Minima handelt.
c) Für welche Werte von k fallen Nullstellen der Funktion $f_k(x)$ mit Wendestellen zusammen ?
d) Zeichnen Sie für den Fall k=2 den Graphen im Intervall $[0 < x \leq 2]$ (Eine Einheit = 5cm)
e) Der Graph von $f_k(x)$ und die x-Achse begrenzen eine Fläche im 4.Quadranten. Bestimmen Sie den Wert dieser Fläche für beliebiges $k \neq 0$ und geben Sie den konkreten Flächeninhalt für k = 2 und k = -2 an.

Aufgabe 2
Gegeben sind die Ebene ***E***: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Gerade $\vec{g} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
a) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Ebene **E** mit den Koordinatenachsen und berechnen Sie den Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung.
b) Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der Gereaden mit der Ebene und bestimmen Sie den Abstand der Geraden vom Koordinatenursprung.

Gegeben ist die Matrix **M**: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
c) Zeigen Sie:
Der bei der Multiplikation von **M** mit einem beliebigen Vektor $\vec{v}$ entstehende Vektor $\vec{w} = M\vec{v}$ liegt immer in der Ebene ***E***.
d) Das Gleichungssystem $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ ist nur für einen bestimmten Wert von k lösbar.
Finden Sie den entsprechenden Wert von k und geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an.
e) Begründen Sie, warum es zur Matrix **M** keine inverse Matrix $\mathbf{M^{-1}}$ geben kann.

Aufgabe 3
Auf dem Betriebsfest einer Firma in Böblingen wird eine Tombola veranstaltet.
Die Besucher können 3 Kugeln aus einer Urne ziehen. In der Urne befinden sich 9 Kugeln.
Drei Kugeln sind mit „B“ , drei mit „I“ und drei Kugeln mit „M“ beschriftet.
Gewonnen hat, wer drei unterschiedliche Kugeln zieht.
a) Wie hoch sind die Gewinnchancen, wenn ohne Zurücklegen gezogen wird ?
b) Wie hoch sind die Gewinnchancen, wenn mit Zurücklegen gezogen wird ?
c) Die Anzahl der drei Kugelsorten wird von jeweils 3 auf **jeweils** x erhöht. Bestimmen Sie jetzt die Gewinnchancen in Abhängigkeit von x für die Fälle mit und ohne Zurücklegen.
d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Gewinnchance beim „Ziehen ohne Zurücklegen“ für $x \to \infty$. Erläutern Sie, warum der Grenzwert mit dem Ergebnis von 3b) übereinstimmen muss.
e) Es werden 336 Spiele wie in Teilaufgabe 3a) gespielt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Preise dabei ausgehen, soll unter 5% bleiben. Wie viele Preise müssen mindestens beschafft werden? Benutzen Sie die Normalverteilung.

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Tabelle zur Normalverteilung, Taschenrechner.

Vorschlag A

1) Aufgabenstellung:
Drei Aufgaben aus Analysis, Vektorrechnung/lineare Algebra und Stochastik. Siehe Aufgabenblatt.

2) Voraussetzungen:
Im Kurs Analysis-2 der Jahrgangsstufe 12.1 wurden Ableitungsregeln und ihre Anwendung bei der Kurvendiskussion behandelt. Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sind bekannt. Die Ableitungen von Exponential- und Winkelfunktionen nebst ihren Umkehrfunktionen wurden behandelt. Zum Lösen von Integralen wurden Substitutionsverfahren und partielle Integration verwendet.
Aus dem Kurs 12.2, Vektorrechnung und lineare Algebra, werden der Umgang mit Gerade und Ebene in vektorieller Darstellung und in Normalform sowie die Verwendung von Matrizen benötigt.
Der Gauß-Algorithmus zum Lösen von Gleichungssystemen ist bekannt. Multiplikation von Matrix mit Vektor und von (symmetrischen) Matrizen miteinander sowie die Bildung inverser Matrizen wurden im Unterricht an konkreten Beispielen behandelt. Eigenwerte und Eigenvektoren sind unbekannt.
Bekannt ist auch das Vektorprodukt zur Bestimmung von Normalenvektoren.
In der Jahrgangsstufe 13.1 wurden im Kurs Stochastik Baumdiagramme, Pfadregeln und bedingte Wahrscheinlichkeiten (Satz von Bayes), Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung behandelt.
Durch das sehr kurze Halbjahr bedingt, stand für Übungen zur Normalverteilung nur sehr wenig Zeit nach den Weihnachtsferien zur Verfügung.

3) Hinweise zur erwarteten Leistung:
Aufgabe 1
1a) Die ersten beiden Ableitungen sollen gebildet werden.
1b) Für eine vollständige Lösung wird erwartet, dass auch negative x-Werte bei der Auflistung der Nullstellen berücksichtigt werden.
1c) Nur für x=0 hat k keinen Einfluss auf die Funktionswerte.
Den Punkt P(0,1) haben alle Funktionen gemeinsam.
1d) Im betrachteten Intervall liegen 3 Nullstellen, ein relatives Maximum, ein relatives Minimum und ein Wendepunkt.
1e) Die bei 1d) bestimmten Punkte reichen zur genauen Zeichnung des Graphen nicht aus. Sinnvoll sind weitere Punkte z.B. bei x=-0,75; x=-0,25; x=0,5. Zusammen mit der Tangente an den Graphen bei (-1;0) kann der Graph in der geforderten Genauigkeit gezeichnet werden.
1f) Erst nach einer zweimaligen, partiellen Integration kann der gesuchte Wert für das Integral allein auf eine Seite gebracht werden. Dies erfordert planmäßiges Verarbeiten komplexer Gegebenheiten.
Es sollte dann erkannt werden, dass für wachsendes b alle mit e^{-kb} multiplizierten Anteile verschwinden und nur noch 1/(2k) übrig bleibt.
Aufgabe 2
2a) Die inverse Matrix soll für diesen allgemeinen Fall gebildet werden.
In dieser allgemeinen Form für Schüler neu!
Es muss erkannt werden dass dies für ad=bc nicht möglich ist, da dann im Nenner jeweils Null steht.
2b) Der hier berechnete Schnittpunkt wird bei 2e benötigt
2c) Umformung der Geradendarstellung in vektorielle Schreibweise führt am schnellsten zum Ziel.
2d) Die Fragestellung ist neu. Die Schüler/innen müssen erkennen, dass sich - nach Umformung auf Dreiecksform- die geforderten Bedingungen nur dann erfüllen lassen, wenn (5-k)(4-k)-6=0 ist.
Daraus ergeben sich zwei Möglichkeiten für k: k=2 oder k=7. Damit kann jetzt jeweils die y-Komponente des Vektors **v** beliebig vorgegeben werden. Da jeweils nur ein einzelner Vektor gefordert ist, können konkrete Werte angegeben werden.
2d) Für die vektorielle Beschreibung der beiden Ebenen liegen schon von 2b und 2c her jeweils ein Richtungsvektor und ein möglicher, gemeinsamer Anlaufvektor vor. Ein zweiter, für beide Ebenen gültiger Richtungsvektor bietet sich durch die Verbindung vom Geradenschnittpunkt zum Punkt P(0;0;h) an. Jetzt lassen sich die Normalenvektoren der beiden Ebenen bilden und so bestimmen, dass ihr Skalarprodukt verschwindet. Erfordert planmäßiges Verarbeiten komplexer Gegebenheiten bei neuartiger Fragestellung.
Aufgabe 3
3a) Aus den Werten ergibt sich, dass 96 von 320 StudentInnen die Frage falsch beantworteten.
Dies sind ¾ der SchwänzerInnen. Also schwänzten 40% die Vorlesung.
3b) Ein Baumdiagramm hilft weiter.
3c) Lösung auf drei verschiedene Arten möglich. Schwierigkeit bei Bayes besteht im Erkennen der benötigten (bedingten) Wahrscheinlichkeiten.
3d) Schwierigkeit beim Umsetzen des Textes in Ungleichung erwartet.
3e) Wenig geübtes Verfahren auf konkrete Aufgabenstellung anwenden.

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Tabelle zur Normalverteilung, Taschenrechner.

Vorschlag B

1) Aufgabenstellung:
Drei Aufgaben aus Analysis, Vektorrechnung/lineare Algebra und Stochastik. Siehe Aufgabenblatt.

2) Voraussetzungen:
Im Kurs Analysis-2 der Jahrgangsstufe 12.1 wurden Ableitungsregeln und ihre Anwendung bei der Kurvendiskussion behandelt. Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sind bekannt. Die Ableitungen von Exponential- und Logarithmus-Funktionen wurden behandelt. Zum Lösen von Integralen wurden Substitutionsverfahren und partielle Integration verwendet.
Aus dem Kurs 12.2, Vektorrechnung und lineare Algebra, werden der Umgang mit Gerade und Ebene in vektorieller Darstellung in Normal- und Achsenabschnittsform sowie die Verwendung von Matrizen benötigt.
Der Gauß-Algorithmus zum Lösen von Gleichungssystemen ist bekannt. Multiplikation von Matrix mit Vektor und von (symmetrischen) Matrizen miteinander sowie die Bildung inverser Matrizen wurden im Unterricht an konkreten Beispielen behandelt. Bekannt ist auch das Vektorprodukt zur Bestimmung von Normalenvektoren.
In der Jahrgangsstufe 13.1 wurden im Kurs Stochastik Baumdiagramme, Pfadregeln und bedingte Wahrscheinlichkeiten (Satz von Bayes), Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung behandelt.
Durch das sehr kurze Halbjahr bedingt, stand für Übungen zur Normalverteilung nur sehr wenig Zeit nach den Weihnachtsferien zur Verfügung.

3) Hinweise zur erwarteten Leistung:
Aufgabe 1
1a) Die Ableitungen können mit Produkt und Quotientenregel berechnet werden.
1b) Eine Nullstelle von $f_k(x)$ liegt immer bei x=1, die zweite Nullstelle folgt aus ln(x)+k = 0.
Definitionsbereich ist vorgegeben, Tief- und Wendepunkt sollen bestimmt werden.
Zeigen, dass Extrempunkt unabhängig von k immer (absolutes) Minimum ist.
1c) Die Gleichung $f_k(x_w) = 0$ lösen. Andere Möglichkeit: Die beiden Gleichungen $x_{Null\_i} = x_{WP}$ jeweils lösen.
1d) Zur genaueren Zeichnung sind weitere, sinnvoll gewählte Punkte erforderlich.
1e) Das Integral lässt sich durch partielle Integration bestimmen. Planmäßiges Verarbeiten komplexer Zusammenhänge und zielgerichtetes Vereinfachen der entstehenden Terme erforderlich.
Die konkreten Werte der Flächeninhalte sind dann für k= 2 und k= -2 besonders einfach.

Aufgabe 2
2a) Da auch der Abstand zum Koordinatenursprung verlangt ist, sollte hier zunächst ein Normalenvektor der Ebene bestimmt werden. Danach Umformung auf Achsenabschnittsform und Hesse-Normalform liefert die geforderten Lösungen.
2b) Schnittpunktbestimmung führt auf ein 3x3 Gleichungssystem. Sinnvoll mit Gauß zu lösen.
Schnittwinkel: Zunächst Winkel zwischen Richtungsvektor und Normalenvektor der Ebene berechnen.
Abstand der Geraden zum Ursprung lässt sich aus $\vec{g} \cdot \vec{u} = 0$ bestimmen.
2c) Zunächst Vektor $\vec{w}$ bestimmen. Am schnellsten lässt sich die Aufgabe dann mit $\vec{w} \cdot \vec{n}_{Ebene} = 0$ lösen, jedoch muss man auf diesen Ansatz erst einmal kommen. Eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren der Ebene mit $\vec{w}$ führt auf ein (verwirrendes) System von 3 Gleichungen mit 5 Unbekannten !
2d) Gleichungssystem aufstellen und allgemein lösen. Begründen, warum nur für k= -10 lösbar.
Dies liefert dann bei beliebig gewähltem $z = \alpha$ die Lösungen $x = 3 - \alpha$ und $y = -2 - \alpha$.
2e) Entweder den Versuch starten M^{-1} zu berechnen: Liefert unerfüllbare Bedingungen. Oder begründen:
Wenn M^{-1} existieren würde, müsste $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar sein. Widerspruch zu 2d).

Aufgabe 3
3a) Verschiedene Lösungsansätze möglich.
3b) Einfacher als 3a). Klassisches Problem.
3c) Ungewohnte Verallgemeinerung der Fragestellung.
3d) der Term $\binom{3x}{3}$ muss auf eine für die Grenzwertbetrachtung sinnvolle Form $\frac{3x(3x-1)(3x-2)}{3}!$ gebracht werden!
Für eine beliebig große Anzahl von Kugeln macht es keinen Unterschied, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.
3e) Wenig geübtes Verfahren auf konkrete Aufgabenstellung anwenden.

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Tabelle zur Normalverteilung, Taschenrechner.