Abitur 2000- Zusätzliche mündliche Abiturprüfung in Mathematik - LK

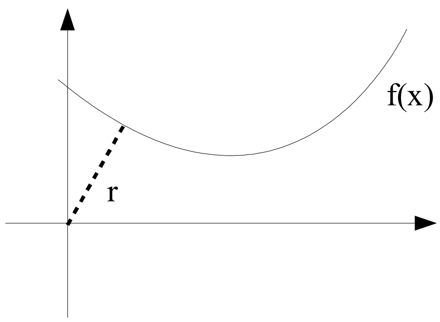
1) Der Graph der Funktion $x \to f(x)$ verläuft nicht durch den Koordinatenursprung.
Gesucht sind diejenigen Punkte auf dem Graphen, die einen minimalem Abstand zum Koordinatenursprungspunkt haben. Bestimmen Sie allgemein die hierfür notwendige Bedingung.

2) Je nach Wahl des Parameters k gibt es bei dem Funktionsgraphen von $f(x) = x^2 - k$ einen oder mehrere Punkte mit geringstem Abstand zum Koordinatenursprung.
Welche Bedingung muss k erfüllen, damit es nicht nur einen nächsten Punkte gibt ?

3) Gegeben ist die Funktion $x \to f(x)|\ f(x) = x^2 - 0{,}25$
Von einem beliebigen Punkt P(x,y) des Graphen gehen zwei Strahlen aus:
Ein Strahl von P ausgehend zum Koordinatenursprung und ein zweiter Strahl von P ausgehend parallel zur senkrechten Achse nach oben.
Zeigen Sie, dass die beiden Strahlen mit dem Lot auf den Funktionsgraphen im Punkt P den gleichen Winkel einschließen.

Für den Prüfungsausschuss:
Lösungsmöglichkeiten

Die Aufgaben 1) und 2) lassen sich sowohl mit den Hilfsmitteln der Analysis als auch mit Vektorrechnung lösen, bei 3) ist ein Ansatz mit Vektoren sinnvoll.



$r(x)=\sqrt{x^2+f^2(x)}$ Extremum: Ableitung = 0 liefert mit Kettenregel die notwendige Bedingung: $x + f\cdot f' = 0$
oder mit Vektorrechnung:
Richtungsvektor des Graphen im Punkt P(x,f(x)) muss senkrecht zum Vektor r stehen:

$$\begin{pmatrix}1\\f'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\f\end{pmatrix}=0$$

zu 2) Aus $x + (x^2 - k)\cdot 2x = 0$ folgt eine Lösung $x = 0$.
Weitere Lösungen der Gleichung sind möglich, wenn $k \geq 0{,}5$ ist.

zu 3)

Lotvektor im Punkt P(x,f) : $\vec{L}=\begin{pmatrix}-f'\\1\end{pmatrix}$ Senkrechter Strahl: $\vec{S}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{PO}=\begin{pmatrix}-x\\-f\end{pmatrix}$

zu zeigen ist, dass für die spezielle Funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ gilt: $\frac{\vec{L}\cdot\vec{S}}{|\vec{L}|\cdot|\vec{S}|}=\cos(\alpha)=\frac{\vec{L}\cdot\vec{PO}}{|\vec{L}|\cdot|\vec{PO}|}$