

DREIEICH-SCHULE, Gymnasium Langen  
Abiturprüfung Mai 1997 - Mathematik Grundkurs  
2.Vorschlag

---

1) Gegeben ist die Funktion  $x \rightarrow f(x)$  mit der Gleichung  $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$

a) Bilden Sie die ersten zwei Ableitungen von  $f(x)$ .

b) Führen Sie jetzt eine Kurvendiskussion durch. (Achsenchnitte, Hoch-, Tief- und Wendepunkt[e]).

Beschränken Sie die Überlegungen dabei zunächst auf das Intervall  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$   
Erweitern Sie dann auf alle  $x \in D$ .

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in dem Intervall  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  in einem geeignet gewählten Koordinatenkreuz.

d) Ermitteln Sie den Wert des Integrals  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x) \, dx$  durch zweimalige, partielle Integration.

2) Ein lineares Gleichungssystem ist in der Form  $M \cdot \vec{x} = \vec{r}$  gegeben.

a) Bestimmen Sie für dem Fall  $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \end{pmatrix}$  den Lösungsvektor.

b) Welchen Winkel schließt der Lösungsvektor mit dem Vektor der rechten Seite ein?

c) Der Vektor auf der rechten Seite soll ein vielfaches des Lösungsvektors sein.

Zeigen Sie, daß aus der Forderung  $M \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$  die Gleichung  $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$  folgt.

d) Welche Werte muß  $\lambda$  annehmen, damit der Lösungsvektor **nicht** der Nullvektor sein muß?  
Geben Sie für diese Fälle mögliche Lösungsvektoren an.

3)

Neu auf den Markt kommende Computerchips sind meist nicht völlig fehlerfrei. Wird bei einem Hersteller nach Produktionsbeginn ein Fehler entdeckt, wird in der Regel der Produktionsprozess nicht gestoppt. Fehlerhafte Bauteile werden solange weiter produziert und vermarktet, bis der "berichtigte" Fertigungsprozess angelaufen ist. Danach werden stillschweigend die "neuen" Chips vermarktet.

Betrachten Sie folgendes (fiktives) Beispiel:

Chiphersteller A mit einem Marktanteil von 75% hat im ersten Jahr nach Produktionsbeginn eines neuen Computerchips 6 Monate lang fehlerhafte Chips ausgeliefert (bei gleichbleibender, monatlicher Produktionsrate).

Firma B - Marktanteil 25% beim gleichen Chiptyp- lieferte erst in den letzten 3 Monaten des 1. Produktionsjahrs eine berichtigte Version aus.

a) Wieviel Prozent aller im ersten Jahr produzierten Chips sind fehlerhaft?

b) Ein Test zeigt, daß Ihr neuer Computer mit einem fehlerhaften Chip bestückt ist.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Ihr Chip vom Marktführer stammt?

DREIEICH-SCHULE, Gymnasium Langen  
Abiturprüfung Mai 1997 - Mathematik Grundkurs  
1. Vorschlag

---

1) Gegeben ist die Funktion  $x \rightarrow f(x)$  mit der Gleichung  $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

a) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen von  $f(x)$ .

Zeigen Sie, daß sich die zweite Ableitung  $f''(x)$  auf die Form  $f''(x) = \frac{x \cdot (2x^2 - 3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$  bringen läßt.

Hilfe: Bringen Sie den Funktionsterm von  $f'$  vor Bildung der 2. Ableitung auf die Form eines einzigen Bruchs.

b) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch.

(Definitionsbereich(e), Achsenschnitte, Hoch-, Tief- und Wendepunkt[e]).

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

d) Der Graph von  $f(x)$  rotiert um die  $x$ -Achse.

Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

2) Gegeben ist die Ebene  $E$  in vektorieller Darstellung:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Setzen Sie zunächst die Parameter  $a=0$  und  $b=0$ .

Bestimmen Sie für diesen Fall die Durchstoßpunkte der drei Koordinatenachsen durch die Ebene und skizzieren Sie einen Ausschnitt der Ebene in einem Schrägbild.

b) Bestimmen Sie (für den Fall  $a=b=0$  !) einen Vektor  $\vec{n}$ , der senkrecht auf der Ebene steht. Wählen Sie nun dessen Länge so, daß er vom Koordinatenursprungspunkt genau bis zur Ebene  $E$  reicht und ermitteln Sie so den Abstand der Ebene vom Punkt  $(0;0;0)$ .

c) Welche Bedingung müssen die beiden Parameter  $a$  und  $b$  erfüllen, damit die Ebene  $E$  **keinen** gemeinsamen Punkt mit der  $x_1$ -Achse besitzt ?

d) Welche Sonderfälle liegen vor, wenn...

d1)  $a=1$  und  $b=2$  gesetzt wird? d2)  $a=-3$  und  $b=-2/3$  gesetzt wird?

3) Bei einem 20-stufigen Bernoulliexperiment sei die Wahrscheinlich für genau 10 Erfolge  $P(X=10)=0,1$ . Bestimmen Sie in diesem Fall die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  des Einzelexperiments.

## 1. Vorschlag

### 1) Aufgabenstellung:

Drei Aufgaben aus Analysis, Vektorrechnung und Stochastik. Siehe beiliegendes Aufgabenblatt.

### 2) Voraussetzungen:

Vorausgesetzt werden die in dem Kurs Analysis in 12.1 erworbenen Kenntnisse in der Differential- und Integralrechnung, Kenntnisse aus der Vektorrechnung und linearer Algebra aus dem Kurs 13.1 sowie Kenntnisse über Bernoulliexperimente aus 12.2.

Zu Aufgabe 1: Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sind bekannt. Wurzelfunktionen wurden behandelt. Die erforderliche Kombination der Regeln in der vorliegenden Aufgabe geht jedoch über die Reproduktion eingeübter Verfahren teilweise erheblich hinaus. Speziell die Bildung von  $f'$  ist für Grundkursschüler als komplex anzusetzen. Die erforderlichen Schritte bei einer Kurvendiskussion sind bekannt. Rotationskörper wurden im Unterricht behandelt.

Zu Aufgabe 2: Die Beschreibung von Geraden und Ebenen in vektorieller Form wurde ausführlich behandelt. Lösen von Gleichungssystemen wurde geübt. Das Skalarprodukt zweier Vektoren und seine Verwendung bei der Winkelbestimmung zwischen 2 Vektoren ist bekannt. Hesse-Normalform wurde nicht im Unterricht behandelt. Bei Abstandsbestimmungen ist das prinzipielle Vorgehen bekannt die Umsetzung bei einer konkreten Aufgabenstellung erfordert jedoch selbständiges Denken.

Zu Aufgabe 3: Im Unterricht war immer die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  bekannt und  $P(X)$  gesucht.

### 3) Erwartete Leistung:

1a) Mit Hilfe von Produkt- und Kettenregel soll zunächst  $f'$  bestimmt werden. Der erhaltene Term sollte vereinfacht werden. Falls  $f'$  nicht selbst bestimmt werden kann, ist die bei 1b) folgende Kurvendiskussion durch die Vorgabe von  $f'$  dennoch möglich.

1b) Bei der Kurvendiskussion wird die Bearbeitung der in der Aufgabenstellung angesprochenen Punkte erwartet. Dabei sollte auch die gegenüber  $f$  erneut eingeschränkte Definitionsmenge von  $f$  und  $f'$  berücksichtigt werden.

1c) Sauberer Graph, der auch den senkrechten Verlauf an den Grenzen des Definitionsbereichs erkennen läßt.

1d) Das Volumen des Rotationskörpers läßt sich unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften von  $f$  leicht berechnen.

2a) Durch die Vorgabe  $a=b=0$  sind die geforderten Achsendurchstoßpunkte leicht zu bestimmen. Die Skizze kann zur Überprüfung des bei b) bestimmten Abstands benutzt werden.

2b) Zunächst kann ein beliebiger Normalenvektor gefunden werden: Sein Skalarprodukt mit jedem der beiden Richtungsvektoren muß Null ergeben. Um diesen Vektor auf die geforderte Länge zu bringen, muß jetzt ein  $3 \times 3$  Gleichungssystem gelöst werden, wobei allerdings nur der "Streckungsfaktor" ermittelt werden braucht.

2c) Damit das Gleichungssystem nicht lösbar ist, muß  $a \cdot b = 2$  werden. Wird das Gleichungssystem mit Determinanten gelöst, ist diese Bedingung leicht zu finden.

2d) Für den Fall d1) beschreibt die Vektorgleichung gar keine Ebene, sondern nur eine Gerade die keine der drei Koordinatenachsen schneidet.

Bei d2) liegt die  $x_1$ -Achse in der Ebene und hat somit alle Punkte mit der Ebene gemeinsam.

3) Die Gleichung für  $P(X=10)$  bei  $n=10$  aber unbekanntem  $p$  sollte zunächst aufgestellt und die Mißerfolgswahrscheinlichkeit  $q$  durch  $(1-p)$  ersetzt werden. Nach Umordnen und dem Ziehen der 10ten Wurzel verbleibt eine quadratische Gleichung zu lösen.

#### 4 Gewichtung

Aufgabe	Anforderungsbereich			Punkte	Erläuterung
	I	II	III		
1a		8	7	15	Produkt- und Kettenregel für $f'$ auf neuen Funktionstyp anwenden $f''$ ist komplex
1b	5	20		25	Achsenschnitte einfach, ansonsten bekanntes Verfahren auf neuen Funktionstyp anwenden.
1c	5			5	Graph
1d	10			10	Rotationskörper wurden behandelt. $f^2$ ist einfach.
2a	10 5			15	Durch die beiden Nullen sind die Gleichungen leicht lösbar. Skizze mit Achsenschnitten ist einfach
2b	5	10	5	20	unterbestimmtes Gleichungssystem erfordert planvolles Vorgehen. Normalenvektor, (möglichst mit ganzzahligen Komponenten) Die Entfernungsbestimmung ist aufwendig, da Hesse-Normalform nicht bekannt.
2c		5		5	Fragestellung ist ungewohnt
2d1		5	5	10	Die Antwort: Keine Achsendurchstoßpunkte reicht nicht aus, die Degeneration der Ebenengleichung muß erkannt werden. Das mathematische Ergebnis (beliebig viele Lösungen) muß richtig gedeutet werden.
3		5 5 5		15	Aufstellen der Gleichung. Fragestellung gegenüber Unterricht umgekehrt. Umordnen und 10.-Wurzel. Nicht alltägliche Umformung. Quadratische Gleichung <i>erkennen</i> und lösen.
	40	63	17	120	

#### 5 Bewertung:

Die Arbeit wird mit 05 Punkten bewertet, wenn mindestens 55 Wertungspunkte erreicht wurden.  
Für 01 Notenpunkt sind 26 Wertungspunkte erforderlich.  
Im übrigen erfolgt eine lineare Zuordnung zwischen erbrachter Leistung und Punktbewertung.

#### 6 Hilfsmittel:

Taschenrechner und Formelsammlung.

Fränkisch-Crumbach, 31.01.1997

## 2. Vorschlag

### 1) Aufgabenstellung:

Drei Aufgaben aus Analysis, linearer Algebra und Stochastik. Siehe beiliegendes Aufgabenblatt.

### 2) Voraussetzungen:

Vorausgesetzt werden die in dem Kurs Analysis in 12.1 erworbenen Kenntnisse in der Differential- und Integralrechnung, Kenntnisse aus der Vektorrechnung und linearer Algebra aus dem Kurs 13.1 sowie Kenntnisse aus dem Stochastikkurs 12.2.

Zu Aufgabe 1: Produkt- und Kettenregel sind bekannt. Sowohl Winkelfunktionen als auch Exponentialfunktionen wurden behandelt. Neu ist ein Produkt aus beiden Funktionstypen. Die bei 1d) erforderliche partielle Integration wurde nur an wenigen Beispielen durchgeführt und ist in dieser Form für Schüler komplex.

Zu Aufgabe 2: Matrizen wurden nach den Weihnachtsferien eingeführt. Eigenwerte und Eigenvektoren wurden jedoch nicht erwähnt. Bei  $2 \times 2$  Gleichungssystemen können Determinanten (Cramersche Regel) zur Lösung verwendet werden. Winkelbestimmungen sind bekannt.

Zu Aufgabe 3: Baumdiagramme zur Darstellung und Berechnung statistischer Zusammenhänge sind bekannt. Bedingte Wahrscheinlichkeiten wurden behandelt.

### 3) Erwartete Leistung:

1a) Mit Hilfe der Produktregel sollen  $f$  und  $f'$  ermittelt werden.

1b) Bei der Kurvendiskussion wird die Bearbeitung der in der Aufgabenstellung angesprochenen Punkte erwartet. Dabei sollte auch die periodische Wiederkehr von Achsenschnitten, Wendestellen und den Extremwertstellen beschrieben werden.

1c) Die Achsenteilung sollte so gewählt werden, daß Funktionswerte im angegebenen Intervall gut erkennbar sind.

1d) Durch zweifache, partielle Integration kann der geforderte Wert berechnet werden.

2a) Die Lösungen  $x_1=2$ ,  $x_2=-3$  sollten bestimmt werden. Damit ist dann auch die Winkelbestimmung bei

2b) möglich.

2c) Die Aufgabenstellung ist ungewohnt. Sinnvoll ist es, das geforderte Gleichungssystem zunächst ausführlich hinzuschreiben und zu ordnen. Danach kann es wieder auf die Form Matrix mal Vektor gebracht werden. Die einzelnen Schritte der Umformung sollten erkennbar sein.

2d) Es muß erkannt werden, daß auch die Determinante im Nenner Null ergeben muß, um nichttriviale Lösungen zu erhalten. Dies führt auf eine quadratische Gleichung mit 2 ganzen Werten für den Parameter  $\lambda$ . Für jeden der beiden Eigenwerte sollte beispielhaft wenigstens ein Vektor angegeben werden. Eine allgemeine Beschreibung wird zusätzlich bewertet.

3a) Entweder kann mit einem Baumdiagramm die Lösung bestimmt werden oder es wird mit fiktiven Produktionszahlen gerechnet. Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt nicht bei den mathematischen Methoden, sondern im Textverständnis und dessen Umsetzung.

3b) Die bedingte Wahrscheinlichkeit soll ermittelt werden. Schwierigkeiten siehe bei 3a).

#### 4 Gewichtung

Aufgabe	Anforderungsbereich			Punkte	Erläuterung
	II	III	I		
1a		10		10	Transferleistung erforderlich, da Zusammenstellung der Funktionen neu und ungewohnt.
1b	5 10	5 5		25	Nullstellen von $f(x)$ und $f'(x)$ sind leicht zu finden Nullstellen von $f''(x)$ erfordern dagegen Transfer. Kurvendiskussion ist geübtes Verfahren Erweiterung auf alle $x$ für $f'$ schwierig.
1c	5			5	Graph kann mit den bei 1b ermittelten und wenigen weiteren Punkten skizziert werden.
1d			10	10	Aufgabe ist komplex. Endgültige Lösung ergibt sich erst nach erneuter Umformung.
2a	10			10	Leicht mit bekanntem Verfahren zu lösen
2b	5			5	Bekanntes Verfahren anwenden
2c		10		10	Fragestellung ist ungewohnt. Formalismus zielgerichtet anwenden.
2d		5	10	15	Fragestellung ist neu. wenn allgemeine Lösung, statt spezieller Vektoren.
3a		10			Schwierigkeit liegt in der Textumsetzung. Lösung mit fiktiven Produktionszahlen oder Baumdiagramm möglich.
3b		10		20	
	35	55	20	110	

#### 5 Bewertung:

Die Arbeit wird mit 05 Punkten bewertet, wenn mindestens 50 Wertungspunkte erreicht wurden.

Für 01 Notenpunkt sind 25 Wertungspunkte erforderlich.

Im übrigen erfolgt eine lineare Zuordnung zwischen erbrachter Leistung und Punktbewertung.

#### 6 Hilfsmittel:

Taschenrechner und Formelsammlung.

Fränkisch-Crumbach, 31.01.1997