Quadratische Gleichungen
Grundlagen – Was sollte bekannt sein?
Einführung – Was sind quadratische Gleichungen?
Lösungsverfahren – Wie löse ich die verschiedenen Typen?
Anwendungsaufgaben – Wo braucht man denn so etwas?

Grundlagen – Was sollte bekannt sein?

Mit einer Gleichung wird eine Aussage formuliert die entweder wahr oder falsch sein kann:
$17=4^2+1$ ist eine wahre Aussage. Die Werte der Terme links und rechts vom Gleichheitszeichen stimmen überein. Wie steht es aber mit dem Wahrheitswert dieser Gleichung: $\sqrt{16+9}=4+3$?
Nicht nur mit Wurzeln, auch mit Klammern und Platzhaltern müsst ihr richtig rechnen können:
Ist $(x+5)^2=x^2+25$ (immer) eine wahre Aussage?
Binome sind wichtiges Grundwissen für quadratische Gleichungen!

Einführung – Was sind quadratische Gleichungen?

Quadratische Gleichungen enthalten einen gesuchten Platzhalter im Quadrat!
$x^2 = 4$ ist eine quadratische Gleichung. Eine wahre Aussage ergibt sich aber nur für zwei bestimmte Werte des Platzhalters x: Entweder muss x=2 sein, dann lautet die Gleichung $2^2=4$ (wahre Aussage), oder aber x= (-2) , denn auch $(-2)^2$ ergibt richtig gerechnet +4 = 4 !
Die Lösungsmenge der Gleichung enthält also zwei Werte: {x| 2, -2}
Leider kommen in der Praxis nicht nur so simple Formen vor.

Lösungsverfahren – Wie löse ich die verschiedenen Typen?

Der einfachste Typ einer quadratischen Gleichung enthält ***nur das Quadrat des Platzhalters*** und nicht noch zusätzlich den Platzhalter ohne Quadrat. Da es aber eine Gleichung ist, gehört natürlich auch noch ein „Gleichheitszeichen“ und ein fester Zahlenwert dazu:
Ganz einfach: $x^2 = 25$. Für die Lösung nicht vergessen: Es gibt auch negative Zahlen.
Genauso einfach: $x^2-36=0$. Daraus wird durch Äquivalenzumformung $x^2 = 36$. Siehe oben.
Die Lösungsmenge muss aber nicht immer nur ganze Zahlen enthalten:
$x^2-\frac{4}{9}=0$ liefert zwei Brüche in der Lösungsmenge
und bei $x^2=3$ lautet die Lösungsmenge $\{\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$.
Und was ist mit $x^2+36= 0$??? Eine Lösungsmenge kann also auch leer sein: { }.
Manchmal sind die Gleichungen zunächst nicht so schnell als „Simpel-Typ“ zu erkennen:
$\frac{2}{3}\cdot x^2+\frac{3}{5}=\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{2}{3}$ schaut zunächst sehr kompliziert aus. Für Bruchrechenmuffel ist sie es wirklich!
Der gesuchte Platzhalter x kommt hier aber wirklich immer nur in der Form x^2 vor, ***es gibt keine x <u>ohne</u> das Quadrat***. Die Gleichung muss sich also durch äquivalente Umformung auf die ganz einfache Form: **x^2 = Zahlenwert** bringen lassen. (Umformungsschritte: -3/5; $-x^2/4$; *12/5)
Prüfe die Lösungen x=2/5 beziehungsweise x=-2/5 durch Einsetzen in die Originalgleichung.

Damit haben wir für diesen einfachen Typ folgendes Lösungsverfahren:
Bringe alle Quadrate des Platzhalters durch Äquivalenzumformung auf die eine (linke) Seite des Gleichheitszeichens und entsprechend alle Zahlenwerte so auf die andere Seite, dass die einfache Form: **x^2 = Zahlenwert** entsteht.
Falls vor dem Quadrat des Platzhalters noch ein Faktor ungleich 1 steht:
Multipliziere die Gleichung auf beiden Seiten mit dem Kehrwert dieses Faktors.
Ziehe die Wurzel aus dem Zahlenwert und vergiss nicht, auch den negativen Wurzel-Wert in die Lösungsmenge zu schreiben.

Noch einfacher sind quadratische Gleichungen, deren Zahlenwert Null ist:
$\mathbf{5x^2 - 3x = 0}$ ist eine quadratische Gleichung die Zahlen ungleich Null nur als Faktoren vor dem gesuchten Wert x aufweist.
Bei dem Term auf der linken Seite lässt sich ein x ausklammern: $\mathbf{x \cdot (5x - 3) = 0}$
Bei so einer Gleichung sollte jedem der wichtige Merksatz wieder einfallen:
Ein Produkt ist Null wenn einer der Faktoren gleich Null ist!
Also muss entweder der erste Faktor: $\mathbf{x = 0}$ sein, oder der zweite Faktor $\mathbf{(5x - 3) = 0}$.
In die Lösungsmenge gehört also die **Null** und **3/5**.
Die obige Gleichung kann auch in der (äquivalenten) Form: $\mathbf{5x^2 = 3x}$ auftreten.
Hier ist man leicht versucht, erst einmal die ganze Gleichung links und rechts durch x zu teilen und dabei die einfachere Form $\mathbf{5x = 3}$ zu erhalten. Deren Lösung ist natürlich wieder $\mathbf{x = 3/5}$,
aber wo ist die andere mögliche Lösung $x = 0$ geblieben ?
Wer findet den versteckten Fehler im Rechengang?

Richtig aufwändig werden quadratische Gleichungen erst dann, wenn neben dem Vielfachen von x und dem Quadrat von x – ohne x^2 wäre es ja keine quadratische Gleichung – auch noch Zahlenwerte ohne x vorkommen. Zum Beispiel: $\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 16}$
Diese Gleichung kann **<u>nicht</u>** auf die Form x^2 = Zahlenwert gebracht werden – dabei stören die 6x !
<u>Ausklammern</u> von x **<u>geht auch nicht</u>** – die reinen Zahlenwerten verhindern es.
Aber die linke Seite der Gleichung schaut doch verdächtig bekannt aus: Wie war das mit Binomen?
$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ und das soll gleich 16 sein. Also: $(x + 3)^2 = 16$
Die Frage ist somit, welcher Zahlenwert statt dem x+3 in der Klammer stehen muss, damit das Quadrat davon 16 ergibt: $(???)^2 = 16$. Da sowohl $(4)^2$ als auch $(-4)^2$ jeweils 16 ergibt kann der **Inhalt der Klammer**, also das $x + 3$, entweder 4 oder -4 sein.
Im ersten Fall muss $x = 1$ und im zweiten Fall $x = -7$ sein.
Überprüfe <u>beide</u> Lösungen durch Einsetzen in die Originalgleichung $x^2 + 6x + 9 = 16$.
Für die Lösung ist es also wichtig, das Binom zu erkennen.

Uns was macht man, wenn es da gar kein Binom zu erkennen gibt weil keines da ist ?
$\mathbf{x^2 + 6x + 4 = 20}$
Links stünde ein Binom, wenn statt der 4 eine 9 vorhanden wäre.
Wenn man nun links 5 dazu addiert um die für das Binom benötigte 9 zu erhalten, muss man dies auch auf der rechten Seite machen, damit die Gleichung **äquivalent** umgeformt ist.
$\mathbf{x^2 + 6x + 4 = 20 \;|\; +5 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 6x + 4 + 5 = 20 + 5 \;\Leftrightarrow\; (x + 3)^2 = 25}$. Also: $x+3 = 5$ oder: $x+3 = -5$
Wer dieses Verfahren mit der quadratischen Ergänzung lange genug übt, kann damit jede quadratische Gleichung umformen und lösen.
Dabei ist es meistens hilfreich, das Binom in zwei Schritten zu erzeugen:
$\mathbf{x^2 + 5x + 4 = 10}$. Statt der 4 müssten in einem Binom $(5/2)^2$ stehen, also erst die 4 wegschaffen:
$\mathbf{x^2 + 5x + 4 = 10 \;|\; -4 \Leftrightarrow}$
$\mathbf{x^2 + 5x \quad = 6}$ und dann zum Binom ergänzen:
$\mathbf{x^2 + 5x \quad = 6 \;|+(5/2)^2 \;\Leftrightarrow}$
....
$\mathbf{(x + 5/2)^2 \quad = 6+(5/2)^2 = 24/4 + 25/4 = 49/4.}$ Finde die Lösungsmenge und überprüfe sie.

Vielen erscheint es allerdings einfacher, einen Formalismus für die Lösung zu benutzen und damit die Suche nach dem Binom zu umgehen. Dies funktioniert aber nur, wenn auch schon die quadratische Gleichung in einer ganz bestimmten – „normalen“ – Form vorliegt. Falls die Gleichung noch nicht in „Normalform“ gegeben ist, muss sie erst durch äquivalente Umformungsschritte dahin gebracht werden!

Die Normalform einer quadratischen Gleichung:
$6x^2 + 14x + 13 = 4x^2 + 2x + 3$ ist eine quadratische Gleichung in der sowohl die Quadrate vom x als auch die x ohne Quadrate und sogar die reinen Zahlenwerte mehrfach vorkommen.
Durch eine äquivalente Umformung wird daraus sehr schnell eine wesentlich übersichtlichere Form:
$2x^2 + 12x + 10 = 0$
Für die Suche nach dem Binom stört hier nur noch, dass es **2**x^2 und nicht nur x^2 sind.
Dies lässt sich aber schnell ändern:
$\mathbf{x^2 + 6x + 5 = 0}$
Dies ist die Normalform der obigen quadratischen Gleichung:
Vor dem x^2 steht der Faktor EINS, *der aus Bequemlichkeit nicht hingeschrieben wird.*
Es gibt ein Vielfaches von x (*ohne Quadrat*), hier **6**x und einen Zahlenwert, die **5**.
Rechts vom Gleichheitszeichen steht der Wert **NULL**.

$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ ist ebenfalls die Normalform einer quadratischen Gleichung.
Hier sind nur die konkreten Werte 6 und 5 durch die Parameter p und q ersetzt.
Die Lösungsschritte für beide Gleichungen werden nun parallel dargestellt:

$x^2 + 6x + 5 = 0 \quad \vert -5$	$x^2 + px + q = 0 \quad \vert -q$
$x^2 + 6x = -5 \quad \vert +(6/2)^2$	$x^2 + px = -q \quad \vert +(p/2)^2$
$x^2 + 6x + 9 = 9 - 5$	$x^2 + px + (p/2)^2 = (p/2)^2 - q$
$(x + 6/2)^2 = 4$	$(x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q$
$x+3=\sqrt{4}=2$ **oder** $x+3=-\sqrt{4}=-2$	$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ **oder** $x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$
Elemente der Lösungsmenge:	Elemente der Lösungsmenge:
$x_{1/2}=-3\pm 2$	$x_{1/2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ **p-q-Formel**
	$x_{1/2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ **andere** Form.

Wenn die quadratische Gleichung in Normalform vorliegt, können die Elemente der Lösungsmenge mit der p-q-Formel ohne großen Aufwand bestimmt werden. Dabei gibt es nur eine Lösung, wenn der Wert von $p^2/4 = q$ ist. Ist $p^2/4 < q$, lässt sich die Wurzel (im reellen Zahlenraum) nicht lösen und die Lösungsmenge ist leer.
Die p-q-Formel kann man natürlich auch anwenden, wenn entweder p oder q oder beide Parameter den Wert Null haben – Dies ist aber dann für diese einfachen Formen (siehe oben) der umständlichere Weg.

Wenn man eine quadratische Gleichung auf die Normalform bringt, erhält man häufig Brüche für p und/oder q. Wer das an dieser Stelle nicht mag, belässt es bei einer Ausgangsform $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ und bestimmt die Lösungen mit der abc-Formel. $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ Die Herleitung dieser Formel sollte allen, die bis hierhin den Rechengang verstanden haben, selbst gelingen.
Falls nicht – schickt mir eine Mail ;-)

Überblick über die verschiedenen Grund-Typen von quadratischen Gleichungen

x ist die gesuchte Variable - a,b,c,p,q sind Parameter

Gleichungstyp	Lösungen	Beispiel	
a) Kein x (ohne Quadrat):			
$x^2=a^2$	$x_{1/2}=\pm a$	$x^2=7^2\rightarrow x_{1/2}=\pm 7$	
$x^2=b$	$x_{1/2}=\pm\sqrt{b}$	$x^2=5\rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{5}$	*neg.Lösung nicht vergessen!*
b) Zahlenwert ist Null			
$x^2+ax=0$	$x\cdot(x+a)=0$	$x^2+7x=0\Leftrightarrow x\cdot(x+7)=0\rightarrow x_1=0\,;\,x_2=-$	
c) Quadratische Gleichung in Normalform		*auf die richtigen Vorzeichen achten !*	
$x^2+px+q=0$	$x_{1/2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	$x^2+8x-9=0\rightarrow x_{1/2}=-4\pm\sqrt{4^2-(-9}$	
		Lösungsmenge: {1 ; -9}	
d) Quadratische Gleichung in abc-Form			
$ax^2+bx+c=0$	$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$	$3x^2-4x+1=0\rightarrow x_{1/2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3\cdot}}{6}$	
		Lösungsmenge: {1 ; 1/3}	

Anwendungsaufgabe – Wo braucht man denn so etwas?
Hier zunächst nur ein Beispiel aus dem Themenbereich
Führerscheinprüfung – Verhalten im Straßenverkehr – Unfallfolgen:
Viele Verkehrsteilnehmer/innen regen sich darüber auf, dass sie in einer 30-Kilometer-Zone geblitzt wurden, obwohl sie doch nur mit 40 km/h – oder maximal 50 km/h – unterwegs waren.
In der Fahrschule lernt man, dass sich der Anhalteweg eines Fahrzeugs aus zwei Teilstrecken zusammensetzt: Anhalteweg = Weg in der Schrecksekunde + Bremsweg.
Für beide Anteile gibt es Näherungsformeln:
Der Weg in der Schrecksekunde (gemessen in Metern) ergibt sich dabei aus folgender Rechnung:
Vom Tacho angezeigte Geschwindigkeit durch 10 teilen und mit 3 multiplizieren.
Also z.B. bei Tempo 50: 50/10 = 5, dies mit 3 multipliziert ergibt 15m in einer Sekunde.
(Das sind zwar 8% mehr als in Wirklichkeit, aber dafür lässt es sich sehr leicht berechnen).
Und glaubt nur nicht, dass ihr weniger als eine Sekunde braucht um auf die Landung eines UFOs direkt vor euch auf der Straße angemessen zu reagieren.
Der Bremsweg ist nach der Fahrschulformel auch leicht zu bestimmen:
Vom Tacho angezeigte Geschwindigkeit durch 10 teilen und diesen Wert quadrieren:
Bei Tempo 50: 50/10 = 5. Bremsweg = 5^2 = 25m. Da der Bremsweg von sehr vielen äußeren Umständen (Straßenbelag, Reifenprofil, Temperatur, Wetter....) abhängt, sind die 25m meist ein zu großer Wert, der Bremsweg kann aber, z.B. bei Eisglätte, auch noch viel länger sein. Im Folgenden geht es auch immer nur um den Vergleich bei sonst gleichen Bedingungen:
Der Anhalteweg A bei einer Geschwindigkeit v = 40 km/h beträgt nach der Fahrschulformel:
$A_{40} = (40/10)*3 + (40/10)^2 = 12m + 16m = 28m$. Bei einer Geschwindigkeit von v=30 km/h sind es:
$A_{30} = (30/10)*3 + (30/10)^2 = 9\ m + 9\ m = 18m$.
Wenn also in einer 30-km-Zone ein Kind **18m** vor einem Fahrzeug auf die Straße springt/fällt/rennt... kann eine ordentliche Fahrerin gerade noch rechtzeitig anhalten. Der „Raser“ kommt erst 10m nach dem Zusammenprall zum Stehen. Aber **mit welcher Geschwindigkeit prallte er auf das Kind ?**
Mit 10 km/h oder 20 km/h oder ca. 30 km/h ?
Zur Lösung benötigt man eine einfache quadratische Gleichung: Bremsweg = $(\text{Geschwindigkeit}/10)^2$ oder etwas kürzer geschrieben: $B = (v/10)^2$. Da der Raser <u>nach dem Crash</u> noch 10m Bremsweg vor sich hat, ist die Geschwindigkeit v gesucht, die zu den 10m Rest-Bremsweg führt.
(Wer nur mit der Variablen x rechnen kann löse die Gleichung $10 = x^2/100$)
Und wie sieht es mit der Aufprallgeschwindigkeit desjenigen aus, der mit 50 in der 30-km-Zone unterwegs war? Oder sogar mit 70 km/h?
Und wie schnell darf man fahren, damit man auf **50m** noch sicher **anhalten** kann?
Bei Nebel sinkt die Sichtweite schnell auf (unter) **100m** ab. Die Zahl der Auffahrunfälle steigt dabei auf Autobahnen jeweils an. Darf man bei dieser Sichtweite noch mit Richtgeschwindigkeit 130 km/h fahren, oder sollte man besser mit 100 km/h durch diesen Nebel schleichen?

Macht euch mal paar Gedanken dazu – nicht erst nach dem ersten Unfall in der Probezeit.